

Formules de caractère pour la série discrète de $GL(N)$

Guide de l'utilisateur pour typistes

Paul Broussous
Université de Poitiers

March 12, 2015

Introduction — Ces notes s'adressent à des spécialistes de la théorie des types pour les groupes réductifs p -adiques et je m'excuse par avance auprès du lecteur qui trouvera très peu de rappels dans ce qui suit, autant en ce qui concerne la théorie que les notations.

L'explicitation de la correspondance de Jacquet-Langlands a été faite par Silberger et Zink en niveau 0, et par Bushnell et Henniart, en niveau quelconque, pour un grand nombre de représentations supercuspidales de $GL(N, F)$. L'extension des travaux de Bushnell et Henniart au cas des représentations non supercuspidales de la série discrète demande d'établir des formules pour la valeur du caractère d'Harish-Chandra en les éléments elliptiques réguliers. Encore récemment peu de formules étaient connues.

J'ai pu obtenir dans [Br] quelques première formules particulières. L'idée de base, due à Henniart, était de transférer le pseudo-coefficient de Kottwitz par les isomorphismes d'algèbres de Hecke de [BK].

Dans le travail [BS] que je présente ici (en commun avec P. Schneider), je propose des formules tout-à-fait générales, retrouvant comme cas particuliers les formules obtenues dans [Br]. Cette fois-ci, l'idée n'est plus de transférer le pseudo-coefficient de Kottwitz, mais d'en construire un directement pour tout membre de la série discrète, par des méthodes de nature homologique (tout comme chez Kottwitz).

Ces pseudo-coefficients s'obtiennent en construisant des systèmes de coefficients équivariants sur l'immeuble. Une première construction [SS] avait été faite par Schneider et Stuhler dans le cas d'un groupe réductif quelconque. Cependant, sauf en niveau 0, ces systèmes de coefficients ne donnaient pas lieu à des formules de caractère exploitables.

Avec Schneider, nous modifions la construction de [SS] en nous servant des types simples de Bushnell et Kutzko pour construire des systèmes de coefficients. C'est Schneider le premier qui a deviné que, cachée dans la monographie [BK], il y a de l'homologie sur l'immeuble de Bruhat-Tits.

L'objet de ces notes est de fournir à un utilisateur potentiel de nos formules de caractère un énoncé succinct, mais complet et utilisable, des résultats de [BS]. Elles s'adressent à des personnes suffisamment à l'aise avec les notations et techniques de [BK].

Contents

1	Notations : groupes et immeubles	2
2	Caractères simples	4
3	Représentations de la série discrète et types simples	5
4	Un système de coefficients	6
5	Résolutions et pseudo-coefficients	8
6	La formule de caractère	10

1 Notations : groupes et immeubles

Pour les assertions non prouvées et/ou non référencées, on renvoie le lecteur à la monographie de Bushnell et Kutzko [BK], ou bien au §I de [BS].

Si K est un corps localement compact et non archimédien, on note \mathfrak{o}_F son anneau d'entiers, \mathfrak{p}_K l'idéal maximal de \mathfrak{o}_K et $k_K = \mathfrak{o}_K/\mathfrak{p}_K$ le corps résiduel (fini). On fixe une fois pour toute un tel corps F .

Soit V un F -espace vectoriel de dimension finie N . On pose $A = \text{End}_F(V) \simeq \text{M}(N, F)$. Si E/F est une extension de corps finie de F plongée dans A , le commutant de E dans A est $B = \text{End}_E(V) \simeq \text{M}(N/[E : F], E)$. On note G le groupe $\text{Aut}_F(V)$ et G_E le groupe $\text{Aut}_E(V)$, centralisateur de E^\times dans G .

On note $\text{Her}(A)$ (resp $\text{Her}(B)$) l'ensemble des \mathfrak{o}_F -ordres héréditaires dans A (resp. des \mathfrak{o}_E -ordres héréditaires dans B). Ce sont des ensembles partiellement ordonnés (EPO) munis des actions par conjugaison de G et G_E respectivement.

On a une injection G_E -équivariante $j_{E/F} : \text{Her}(A) \longrightarrow \text{Her}(B)$. Elle associe à un ordre héréditaire \mathfrak{B} de B attaché à une \mathfrak{o}_E -chaîne de réseaux

(\mathcal{L}) de V , l'ordre héréditaire $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\mathfrak{B})$ associé à (\mathcal{L}) vue comme \mathfrak{o}_F -chaîne de réseaux.

L'immeuble semisimple X_F de G est naturellement la réalisation géométrique d'un complexe simplicial de dimension $N - 1$, et de façon abusive, on notera encore X_F ce complexe simplicial. C'est un espace topologique localement compact sur lequel G_F agit par automorphismes simpliciaux. Il existe une bijection décroissante et G_F -équivariante entre l'EPO $\text{Her}(A)$ et l'EPO des simplexes de X_F , que l'on notera $\mathfrak{A} \mapsto \sigma_{\mathfrak{A}}$. Elle est caractérisée comme suit : si \mathfrak{A} est un ordre héréditaire de A , $\sigma_{\mathfrak{A}}$ est l'unique simplexe de l'immeuble dont le fixateur compact est le sous-groupe parahorique $U(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}^\times$. On a des notations et faits similaires pour le groupe G_E .

Sur les réalisations géométriques X_F et X_E , on a des structures affines : le barycentre de deux points à coefficients positifs est défini. Le fait suivant sera un ingrédient crucial de nos constructions.

Théorème 1.1 (BL) *i) Il existe une unique application $j : X_E \longrightarrow X_F$ qui est G_E -équivariante et affine.*

ii) De plus les complexes de drapeaux $\text{Flag}(\text{Her}(A))$ et $\text{Flag}(\text{Her}(B))$ correspondent respectivement aux premières subdivisions barycentriques de X_F et X_E . On montre que j correspond à l'application $\text{Flag}(\text{Her}(B)) \longrightarrow \text{Flag}(\text{Her}(A))$ induite par $j_{E/F}$. En particulier, si $\mathfrak{B} \in \text{Her}(B)$, alors j envoie l'isobarycentre de $\sigma_{\mathfrak{B}}$ sur l'isobarycentre de $\sigma_{\mathfrak{A}(\mathfrak{B})}$.

Dans la suite on identifiera systématiquement le G_E -ensemble X_E avec son image $j(X_E)$ dans X_F . L'inclusion $X_E \subset X_F$ n'est pas simpliciale en général. Elle l'est si, et seulement si, l'extension E/F est non ramifiée. Cependant l'inclusion $X_E \subset X_F$ est toujours simpliciale après passage à la première subdivision barycentrique.

Le sous- G_F -ensemble $X(E) = \bigcup_{g \in G} g.X_E$ de X_F est naturellement la réalisation géométrique d'un complexe simplicial $X[E]$. Si E/F est non ramifiée, alors $X[E]$ est un sous-complexe simplicial de X_F . En général il faut passer à la première subdivision barycentrique pour que l'inclusion $X(E) \subset X_F$ soit simpliciale.

Si $\mathfrak{A} \in \text{Her}(A)$, on note $U(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}^\times$ le sous-groupe parahorique qui fixe le simplexe $\sigma_{\mathfrak{A}}$ de X_F . Son sous-groupe pro-unipotent est $U^1(\mathfrak{A}) = 1 + \mathfrak{P}_{\mathfrak{A}}$, où $\mathfrak{P}_{\mathfrak{A}}$ est le radical de Jacobson de \mathfrak{A} .

Si E/F est un sous-corps de A et si $\mathfrak{B} \in \text{Her}(B)$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\mathfrak{B})$, alors on a :

$$\mathcal{N}(\mathfrak{A}) \cap G_E = \mathcal{N}(\mathfrak{B}), \quad U(\mathfrak{A}) \cap G_E = U(\mathfrak{B}), \quad U^1(\mathfrak{A}) \cap G_E = U^1(\mathfrak{B}), \quad \mathcal{N}(\mathfrak{A}) = \mathcal{N}(\mathfrak{B})U(\mathfrak{A}).$$

De plus, l'action de G sur X_E possède la propriété suivante :

Lemme 1.1 (*[BS] Lemma I.3.3*) *Si deux simplexes de X_E sont conjugués sous l'action de G , ils le sont sous l'action de G_E .*

En d'autres termes, G n'induit pas plus d'action sur X_E que G_E le fait déjà.

2 Caractères simples

Les références pour cette section sont [BK] et [BH]. On fixe une fois pour toute une paire simple $[0, \beta]$ ([BH](1.5)), c'est-à-dire une extension finie E/F munie d'un générateur β (i.e. $E = F[\beta]$), satisfaisant les conditions suivantes :

- [PS1] $\beta \notin \mathfrak{o}_E$,
- [PS2] $k_0(\beta, \mathfrak{A}(E)) < 0$ (cf. [BK]§1).

Pour chaque E -espace vectoriel V et chaque $\mathfrak{B} \in \text{Her}(B)$, où $B = \text{End}_E(V)$, on a une strate simple $[\mathfrak{A}(\mathfrak{B}), n_{\mathfrak{B}}, 0, \beta]$ dans $A = \text{End}_F(V)$, réalisation de $[0, \beta]$ dans A .

Attachées à $[\mathfrak{A}(\mathfrak{B}), n_{\mathfrak{B}}, 0, \beta]$ (donc à $[0, \beta]$, V , \mathfrak{B}), on a les données suivantes :

- Deux sous-groupes ouverts compacts de $G = \text{Aut}_F(V)$: $H^1(\mathfrak{B}) \subset J^1(\mathfrak{B}) \subset U^1(\mathfrak{A}(\mathfrak{B}))$, tous deux normalisés par $\mathcal{N}(\mathfrak{B})$.
- Un ensemble fini de caractères simples $\mathcal{C}(\mathfrak{B}) = \mathcal{C}(\mathfrak{A}(\mathfrak{B}), 0, \beta)$ de $H^1(\mathfrak{B})$, qui ont chacun un G -entrelacement donné par $J^1(\mathfrak{B})G_E J^1(\mathfrak{B})$.

Rappelons que si $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{B})$, il existe à isomorphisme près une unique représentation irréductible $\eta = \eta(\theta)$ de $J^1(\mathfrak{B})$ qui contient θ par restriction (la représentation de Heisenberg de θ).

La paire simple et le E -espace vectoriel V étant fixés, on a des bijections canoniques :

$$\tau_{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2} : \mathcal{C}(\mathfrak{B}_1) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathfrak{B}_2), \quad \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \in \text{Her}(B),$$

appelées *applications de transfert* ([BK](3.6)). Grâce à ces applications, si l'on fixe une paire simple $[0, \beta]$, un E -espace vectoriel V , un ordre \mathfrak{B}_0 dans $B = \text{End}_E(V)$ et un caractère simple $\theta_0 \in \mathcal{C}(\mathfrak{B}_0)$, on obtient une famille de caractères simples $(H^1(\mathfrak{B}), \theta(\mathfrak{B}))_{\mathfrak{B} \in \text{Her}(B)}$ en posant $\theta(\mathfrak{B}) = \tau_{\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}}(\theta_0)$. Il lui est associé une famille de représentations de Heisenberg $(H^1(\mathfrak{B}), \theta(\mathfrak{B}))_{\mathfrak{B} \in \text{Her}(B)}$ définies à isomorphisme près. Il est facile de vérifier que ces deux familles sont G_E -équivariantes en un sens évident.

Pour chaque paire d'ordres héréditaires $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2$ dans $\text{Her}(B)$, on peut former le groupe $J^1(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2) = U^1(\mathfrak{B}_1)J^1(\mathfrak{B}_2)$.

Proposition 2.1 ([BK] (5.1.14-16), (5.1.18), (5.1.19)) *Fixons une paire simple $[0, \beta]$, un E -espace vectoriel V , un ordre $\mathfrak{B}_0 \in \text{Her}(B)$ et un caractère simple $\theta_0 \in \mathcal{C}(\mathfrak{B}_0)$. Alors il existe une unique famille de représentations $(J^1(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2), \eta(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2))_{\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2}$ (définies à isomorphismes près) qui étend la famille $(J^1(\mathfrak{B}), \eta(\mathfrak{B}))_{\mathfrak{B}}$ au sens suivant :*

- (i) $\eta(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}) = \eta(\mathfrak{B})$, $\mathfrak{B} \in \text{Her}(B)$;
- (ii) $\eta(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)|_{J^1(\mathfrak{B}_2)} \simeq \eta(\mathfrak{B}_1)$, $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2 \in \text{Her}(B)$;
- (iii) les induites suivantes sont irréductibles et équivalentes :

$$\text{Ind}_{J^1(\mathfrak{B}_1)}^{U^1(\mathfrak{A}_1)} \eta(\mathfrak{B}_1) \simeq \text{Ind}_{J^1(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)}^{U^1(\mathfrak{A}_1)} \eta(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2), \quad \mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2 \in \text{Her}(B) .$$

De plus on a la relation de compatibilité :

$$\eta(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)|_{J^1(\mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3)} \simeq \eta(\mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3), \quad \mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2 \subset \mathfrak{B}_3 \in \text{Her}(B) .$$

Il est facile de vérifier que la famille $(J^1(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2), \eta(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2))_{\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2}$ de représentations de Heisenberg est G_E -équivariante en un sens évident.

3 Représentations de la série discrète et types simples

Sauf si ça n'est pas dit expressément, on utilisera les notations de [BK].

On fixe une fois pour toute un type simple (J, λ) au sens de [BK](5.5.10). On supposera de plus que l'on est en niveau > 0 . Concrètement cela signifie la chose suivante.

Il existe une paire simple $[0, \beta]$, un E -espace vectoriel V de dimension finie, où $E = F[\beta]$ et un ordre principal \mathfrak{B}_0 dans $B = \text{End}_E(V)$. La représentation λ du groupe $J = J(\mathfrak{B}_0) = J^1(\mathfrak{B}_0)U(\mathfrak{B}_0)$ est de la forme $\kappa_0 \otimes \rho$, où κ_0 est une β -extension d'un caractère simple $\theta_0 \in \mathcal{C}(\mathfrak{B}_0)$ ([BK](5.2.1)), et ρ est l'inflation d'une représentation irréductible cuspidale de $J/J^1(\mathfrak{B}_0)$ de la forme suivante. Rappelons que le quotient $J/J^1(\mathfrak{B}_0)$ s'identifie à $\text{GL}(n/e, k_E)^{\times e}$, où $n := \dim_E(V)$, e est la période de l'ordre \mathfrak{B}_0 , et k_E désigne le corps résiduel de E . Alors la condition sur ρ est que, comme représentation de $\text{GL}(n/e, k_E)^{\times e}$, elle est de la forme $\rho_0^{\otimes e}$, où ρ_0 est une représentation (irréductible, cuspidale) de $\text{GL}(n/e, k_E)$.

Les données décrivant le type simple (J, λ) de $G = \text{Aut}_F(V)$ ne sont pas uniques. C'est pour cette raison que nous fixons une fois pour toute :

- une paire simple $[0, \beta]$,
- un E -espace vectoriel V

- un ordre principal \mathfrak{B}_0 dans $B = \text{End}_E(V)$,
- un caractère simple $\theta_0 \in \mathcal{C}(\mathfrak{B}_0)$,
- une β -extension κ_0 de θ_0 ,
- une représentation cuspidale irréductible ρ_0 de $\text{GL}(n/e, k_E)$.

De plus d'après la Proposition 2.1, ces données donnent lieu à une famille G_E -équivariante de représentations de Heisenberg $(J^1(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2), \eta(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2))_{\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2}$.

Fixons une extension non ramifiée L/E contenue dans B , vérifiant $[L : F] = n/e$, telle que le groupe multiplicatif L^\times normalise \mathfrak{B}_0 . On pose $\text{End}_L V \simeq M(e, L)$ et $G_L = \text{Aut}_L V$. On a une application canonique $\text{Her}(C) \rightarrow \text{Her}(B)$ ainsi qu'une inclusion simpliciale et G_L -équivariante $X_L \subseteq X_E$. Notons que l'unique ordre $\mathfrak{C}_0 \in \text{Her}(C)$ vérifiant $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}(\mathfrak{C}_0)$ est un ordre minimal (ou *ordre d'Iwahori*) ; par contre \mathfrak{B}_0 n'est pas minimal en général. On note $X[L] = \bigcup_{g \in G} gX_L$ que l'on munit de la structure simpliciale naturelle G -invariant qui prolonge celle de X_L .

On fixe un ordre maximal $\mathfrak{C}_{\max} \supseteq \mathfrak{C}_0$ et on pose $\mathfrak{B}_{\max} = \mathfrak{B}(\mathfrak{C}_{\max})$; cet ordre est toujours maximal. D'après [BK](5.2.2-5), isomorphisme près, il existe une unique β -extension κ_{\max} de $\eta(\mathfrak{B}_{\max})$ telle que

$$\text{Ind}_{J(\mathfrak{B}_0)}^{U(\mathfrak{B}_0)U^1(\mathfrak{A}(\mathfrak{B}_0))} \kappa_0 \simeq \text{Ind}_{U(\mathfrak{B}_0)J^1(\mathfrak{B}_{\max})}^{U(\mathfrak{B}_0)U^1(\mathfrak{A}(\mathfrak{B}_0))} \kappa_{\max} .$$

On peut alors former la représentation $\lambda_{\max} = \kappa_{\max} \otimes \rho$ de $J_{\max} := U(\mathfrak{B}_0)J^1(\mathfrak{B}_{\max})$; elle est irréductible.

Théorème 3.1 *a) La paire $(J_{\max}, \lambda_{\max})$ est un type de G qui définit la même composante de Bernstein $\mathcal{R}_{(J, \lambda)}(G)$ que (J, λ) .
b) Soit (π, \mathcal{V}) un objet de $\mathcal{R}_{(J, \lambda)}(G)$. On a $\mathcal{V}^{\lambda_{\max}} = \mathcal{V}^{\eta(\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_{\max})}$.
c) Soit (π, \mathcal{V}) une représentation irréductible essentiellement de carré intégrable modulo le centre, objet de $\mathcal{R}_{(J, \lambda)}(G)$. Alors (π, \mathcal{V}) contient la paire $(J_{\max}, \lambda_{\max})$ (resp. la paire (J, λ)) avec multiplicité 1.*

4 Un système de coefficients

Un système de coefficients équivariant sur le G -complexe simplicial $X[L]$ est la donnée de $((\mathcal{V}_\sigma)_\sigma, (r_\tau^\sigma)_{\tau \subset \sigma}, (\varphi_{g, \sigma})_{g, \sigma})$, où :

- pour chaque simplexe σ de $X[L]$, \mathcal{V}_σ est un \mathbb{C} -espace vectoriel,
- pour $\tau \subseteq \sigma$, $r_\tau^\sigma \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{V}_\sigma, \mathcal{V}_\tau)$.
- pour σ simplexe, $g \in G$, $\varphi_{g, \sigma} \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{V}_\sigma, \mathcal{V}_{g\sigma})$.

- pour chaque simplexe σ , $r_\sigma^\sigma = \varphi_{1,\sigma} = \text{id}_{\mathcal{V}_\sigma}$,
- tous les diagrammes que l'on peut imaginer commutent,
- pour tout σ la représentation de G_σ dans \mathcal{V}_σ induite par le système de coefficients est lisse.

Soit à présent (π, \mathcal{V}) une représentation lisse de G . Soit $\mathfrak{C} \in \text{Her}(C)$ tel que $\mathfrak{C}_{\min} \subseteq \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{C}_{\max}$, et soit $\sigma_{\mathfrak{C}}$ le simplexe de X_L attaché à \mathfrak{C} . On pose alors

$$\mathcal{V}_{\sigma_{\mathfrak{C}}} = \sum_{g \in U(\mathfrak{A})/U(\mathfrak{B})J^1(\mathfrak{B}_{\max})} \pi(g) \mathcal{V}^{\eta(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_{\max})}$$

où $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\mathfrak{C})$ et $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\mathfrak{B})$.

Si σ est un simplexe quelconque de $X[L]$, on peut toujours l'écrire $\sigma = g \cdot \sigma_{\mathfrak{C}}$, pour un $g \in G$ et un $\mathfrak{C} \in \text{Her}(C)$ tel que $\mathfrak{C}_{\min} \subseteq \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{C}_{\max}$, et on pose $\mathcal{V}_\sigma = \pi(g) \mathcal{V}_{\sigma_{\mathfrak{C}}}$.

Théorème 4.1 *a) Si σ est un simplexe de $X[L]$, \mathcal{V}_σ est bien défini, c'est-à-dire ne dépend d'aucun choix.*

b) Si $\tau \subseteq \sigma$ sont des simplexes de $X[L]$, on a $\mathcal{V}_\sigma \subseteq \mathcal{V}_\tau$.

c) Si σ est un simplexe de $X[L]$ et si $g \in G$, alors $\mathcal{V}_{g\sigma} = \pi(g) \mathcal{V}_\sigma$.

On peut donc définir un système de coefficients $\mathcal{C}(\pi) = ((\mathcal{V}_\sigma)_\sigma, (r_\tau^\sigma)_{\tau \subseteq \sigma}, (\varphi_{g,\sigma})_{g,\sigma})$ sur $X[L]$, en définissant r_τ^σ comme étant l'inclusion $\mathcal{V}_\sigma \subseteq \mathcal{V}_\tau$, et $\varphi_{g,\sigma}$ comme étant l'application $\mathcal{V}_\sigma \rightarrow \mathcal{V}_{g\sigma}$ induite par $\pi(g)$.

Théorème 4.2 *Supposons que $(\pi, \mathcal{V}) \in \mathcal{R}_{(J,\lambda)}(G)$. Alors le complexe $X[L]$ et le système de coefficients $\mathcal{C}(\pi)$ ne dépendent que de l'endo-classe Θ du caractère simple θ_0 , et donc d'aucun autre choix fait dans la construction. On notera $\mathcal{C}_\Theta(\pi)$ ce système de coefficients canoniquement attaché à π .*

Ce système de coefficients peut se calculer presque entièrement si (π, \mathcal{V}) est irréductible et essentiellement de carré intégrable, ce que nous supposons jusqu'à la fin de cette section.

Soit $\mathfrak{C} \in \text{Her}(C)$ tel que $\mathfrak{C}_{\min} \subseteq \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{C}_{\max}$. On pose comme d'habitude $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\mathfrak{C})$ et $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\mathfrak{B})$. Le quotient $\mathbb{G}_{\mathfrak{B}} = U(\mathfrak{B})/U^1(\mathfrak{B})$ est un produit de groupes linéaires généraux sur k_E , le corps résiduel de E . Il possède $\mathbb{P}_{\mathfrak{B}_0} = U(\mathfrak{B}_0)/U^1(\mathfrak{B})$ comme sous-groupe parabolique. Ce dernier admet comme radical unipotent $\mathbb{U}_{\mathfrak{B}_0} = U^1(\mathfrak{B}_0)/U^1(\mathfrak{B})$, et comme facteur de Levi

$$\mathbb{L}_{\mathfrak{B}_0} = \mathbb{P}_{\mathfrak{B}_0}/\mathbb{U}_{\mathfrak{B}_0} = U(\mathfrak{B}_0)/U^1(\mathfrak{B}_0) \simeq \text{GL}(n/e, k_E)^{\times e}.$$

Soit $\text{St}(\mathfrak{B}, \rho)$ la représentation de Steinberg généralisée de $\mathbb{G}_{\mathfrak{B}}$ de support cuspidal $(\mathbb{L}_{\mathfrak{B}_0}, \rho)$: c'est l'unique sous-représentation irréductible générique

de l'induite parabolique $\text{ind}_{\mathbb{P}_{\mathfrak{B}_0}}^{\mathbb{G}_{\mathfrak{B}}} \rho$. On peut alors former la représentation $\kappa_{\max} \otimes \text{St}(\mathfrak{B}, \rho)$ de $U(\mathfrak{B})J^1(\mathfrak{B}_{\max})$. On montre que cette représentation est irréductible.

Proposition 4.1 *a) On a $\mathcal{V}^{\eta(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_{\max})} \simeq \kappa_{\max} \otimes \text{St}(\mathfrak{B}, \rho)$ comme $U(\mathfrak{B})J^1(\mathfrak{B}_{\max})$ -modules.*

b) La représentation induite :

$$\lambda(\mathfrak{A}) := \text{ind}_{U(\mathfrak{B})J^1(\mathfrak{B}_{\max})}^{U(\mathfrak{A})} (\kappa_{\max} \otimes \text{St}(\mathfrak{B}, \rho))$$

est irréductible.

c) Soit $(\pi, \mathcal{V}) \in \mathcal{R}_{(J, \lambda)}(G)$ une représentation irréductible essentiellement de carré intégrable. Si $\mathcal{C}_{\Theta}(\pi) = ((\mathcal{V}_{\sigma})_{\sigma}, (r_{\tau}^{\sigma})_{\tau \subseteq \sigma}, (\varphi_{g, \sigma})_{g, \sigma})$ est le système de coefficients attaché à π , alors

$$\mathcal{V}_{\sigma_{\mathfrak{e}}} = \mathcal{V}^{\lambda(\mathfrak{A})} \simeq \lambda(\mathfrak{A})$$

où l'isomorphisme est un isomorphisme de $U(\mathfrak{A})$ -modules.

Remarque 4.3 *Il est très important de noter que la donnée du type (J, λ) de π ne permet pas de connaître entièrement le système de coefficients $\mathcal{C}_{\Theta}(\pi)$, mais seulement les espaces $\mathcal{V}_{\sigma_{\mathfrak{e}}}$ comme $U(\mathfrak{A})$ -modules. Le stabilisateur $G_{\sigma_{\mathfrak{e}}}$ de $\sigma_{\mathfrak{e}}$ dans G a la forme d'un produit semi-direct $\langle \Pi_{\mathfrak{A}} \rangle \ltimes U(\mathfrak{A})$, pour un certain élément $\Pi_{\mathfrak{A}}$ de G qui normalise \mathfrak{A} . Il faudrait alors connaître l'action de $\Pi_{\mathfrak{A}}$ sur $\mathcal{V}^{\lambda(\mathfrak{A})}$. Ce problème devrait être résolu en se donnant π par un type simple étendu. Jusqu'à présent, les types simples étendus ne sont construits que pour les représentations supercuspidales (cf. [BK]§6) et les représentations de la série discrète de niveau 0 ([BH2], [SZ]).*

5 Résolutions et pseudo-coefficients

En gardant les notations du §3, on fixe un type simple (J, λ) ainsi qu'une représentation $(\pi, \mathcal{V}) \in \mathcal{R}_{(J, \lambda)}$. On lui a associé un G -complexe simplicial $X_{\pi} = X[L]$ muni d'un système de coefficients G -équivariant $\mathcal{C}_{\Theta}(\pi)$. On peut alors former, pour $q = 0, \dots, d-1$, $d = \dim(X_{\pi})$, les espaces $C_q^{\text{or}}(X_{\pi}, \mathcal{C}_{\Theta}(\pi))$ de chaînes orientées de X_{π} à coefficients dans $\mathcal{C}_{\Theta}(\pi)$; ce sont des G -modules lisses. Ils sont munis d'applications bords G -équivariantes et forment ainsi un complexe de chaînes naturellement augmenté sur la représentation \mathcal{V} :

$$C_d^{\text{or}}(X_{\pi}, \mathcal{C}_{\Theta}(\pi)) \xrightarrow{\partial} C_{d-1}^{\text{or}}(X_{\pi}, \mathcal{C}_{\Theta}(\pi)) \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} C_0^{\text{or}}(X_{\pi}, \mathcal{C}_{\Theta}(\pi)) \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{V} \longrightarrow 0 \quad (1)$$

Proposition 5.1 *Le complexe augmenté (1) est un complexe dans la catégorie $\mathcal{R}_{(J,\lambda)}(G)$.*

Conjecture 1 *Le complexe augmenté (1) est une résolution de \mathcal{V} dans la catégorie $\mathcal{R}_{(J,\lambda)}(G)$.*

Cette conjecture est une conséquence de la conjecture suivante :

Conjecture 2. *Considérons le complexe obtenu de (1) en appliquant le foncteur (l'équivalence de catégories) $\mathcal{R}_{(J,\lambda)}(G) \longrightarrow \mathcal{H}_{\text{Spher}}(G, \lambda_{\max}) - \text{Mod}$, $\mathcal{W} \mapsto \mathcal{W}^{\lambda_{\max}}$:*

$$C_d^{\text{or}}(X_\pi, \mathcal{C}_\Theta(\pi))^{\lambda_{\max}} \xrightarrow{\partial} C_{d-1}^{\text{or}}(X_\pi, \mathcal{C}_\Theta(\pi))^{\lambda_{\max}} \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} C_0^{\text{or}}(X_\pi, \mathcal{C}_\Theta(\pi))^{\lambda_{\max}} \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{V}^{\lambda_{\max}} \longrightarrow 0 \quad (2)$$

Alors le complexe de chaînes augmenté (2) est canoniquement isomorphe au complexe de chaînes d'un appartement standard \mathcal{A}_L de X_L à coefficients constants dans $\mathcal{V}^{\lambda_{\max}}$. Puisque \mathcal{A}_L est contractile, ce dernier complexe est exact.

Dans [BS], nous démontrons la Conjecture 2, et donc la Conjecture 1 dans le cas particulier suivant.

Théorème 5.1 *Avec les notations précédentes, supposons que (π, \mathcal{V}) est irréductible et essentiellement de carré intégrable. Alors la conjecture 2 est vraie.*

Nous supposons dorénavant que la représentation (π, \mathcal{V}) est irréductible et essentiellement de carré intégrable.

Soit Z le centre de G . Fixons une mesure de Haar $\mu_{G/Z}$ sur G/Z .

Pour chaque simplexe σ de X_π , on note G_σ le stabilisateur global de σ dans G , et λ_σ la représentation irréductible de G_σ dans \mathcal{V}_σ induite par le système de coefficients $\mathcal{C}_\Theta(\pi)$; on note $\tau_\sigma^\mathcal{V}$ le caractère de λ_σ , que l'on étend par 0 à G en une fonction localement constante à support compact modulo le centre ; on note $\epsilon_\sigma : G_\sigma \longrightarrow \{\pm 1\}$ le caractère de G_σ défini comme suit : si $g \in G_\sigma$, $\epsilon_\sigma(g)$ est la signature de la permutation des sommets de σ induite par g ; enfin on étend la fonction ϵ_σ à G en une fonction localement constante à support compact modulo le centre.

Pour $q = 0, \dots, d = \dim X_\pi$, fixons un ensemble \mathcal{F}_q de représentants des orbites de G dans les q -simplexes de X_π . A la suite de Kottwitz [Ko] et Schneider et Stuhler [SS], on attache à (π, \mathcal{V}) une fonction dite *d'Euler-Poincaré* par la formule :

$$f_{\text{EP}}^\mathcal{V} := \sum_{q=0}^d \sum_{\sigma \in \mathcal{F}_q} (-1)^q \mu_{G/Z}(G_\sigma/Z)^{-1} \bar{\tau}_\sigma^\mathcal{V} \epsilon_\sigma .$$

En suivant une idée originale de Kottwitz, reprise par Schneider et Stuhler, on démontre :

Théorème 5.2 *La fonction $f_{\text{EP}}^{\mathcal{V}}$ est un pseudo-coefficient de (π, \mathcal{V}) .*

6 La formule de caractère

On fixe une représentation (π, \mathcal{V}) de G supposée irréductible et essentiellement de carré intégrable. On note χ_π son caractère d'Harish-Chandra. On garde les notations des sections précédentes. Nous aurons besoin du résultat suivant (dû à Kazhdan [Ka] dans le cas d'un corps de base de caractéristique 0 et d'un groupe réductif à centre compact, et à Badulescu [Ba] dans le cas de notre groupe).

Théorème 6.1 *Soit f_π un pseudo-coefficient et $\gamma \in G$ un élément elliptique régulier. Alors $\chi_\pi(\gamma)$ est donné par l'intégrale orbitale convergente :*

$$\chi_\pi(\gamma) = \int_{G/Z} f_\pi(g^{-1}\gamma^{-1}g) d\mu_{G/Z}(\dot{g}) .$$

L'application de ce résultat au pseudo-coefficient $f_{\text{EP}}^{\mathcal{V}}$ donne une formule pour la valeur de χ_π en un élément elliptique régulier γ . Elle s'exprime de façon élégante dans le cadre géométrique suivant.

Soit $|X_\pi|$ la réalisation géométrique standard de X_π ; c'est un espace topologique localement compact muni d'une action de G . L'ensemble de points fixes $|X_\pi|^\gamma$ est compact. Il est muni de la structure simpliciale naturelle suivante : ses simplexes sont les intersections non vides $\sigma(\gamma) := \sigma \cap |X_\pi|^\gamma$, pour un simplexe σ de X_π globalement fixe par γ . En fait $\sigma(\gamma)$ détermine entièrement σ .

Avec ces notations, on a alors la formule de caractère suivante.

Théorème 6.2 *La valeur du caractère d'Harish-Chandra de π en un élément elliptique régulier γ est donnée par*

$$\chi_\pi(\gamma) = \sum_{q=0}^{\dim |X_\pi|^\gamma} \sum_{\sigma(\gamma) \in |X_\pi|_q^\gamma} (-1)^q \text{Tr}(\gamma, \lambda_\sigma) ,$$

où $|X_\pi|_q^\gamma$ désigne l'ensemble des q -simplexes de $|X_\pi|^\gamma$.

Cette dernière formule ne peut en aucun cas tre considérée comme *effective* en général. En effet pour un élément γ elliptique régulier quelconque, il n'existe aucune description connue de l'ensemble de points fixes $|X_\pi|^\gamma$ (ni de l'ensemble $|X|^\gamma$ d'ailleurs). Il y a un cas cependant où la formule se simplifie de façon raisonnable, c'est celui où γ est minimal sur F au sens de [BK](1.4.14).

Lemme 6.1 *Supposons γ elliptique régulier et minimal sur F . Alors $|X|^\gamma = |X|^{K^\times}$, où $K = F[\gamma]$. En particulier $|X|^\gamma$ se réduit à un point, image canonique de l'immeuble X_K dans X . Dans un autre langage, $|X|^\gamma = \{x_\gamma\}$, où x_γ est l'isobarycentre du simplexe attaché à l'unique ordre héréditaire \mathfrak{A}_γ de A normalisé par K^\times (ou de façon équivalente par γ).*

On en déduit une formule simple de caractère :

Théorème 6.3 *Soit γ un élément elliptique régulier de G , minimal sur F . Soit \mathfrak{A}_γ l'unique ordre héréditaire de A normalisé par $F[\gamma]^\times$, et soit x_γ l'isobarycentre du simplexe de X correspondant à \mathfrak{A}_γ . Si $x_\gamma \in |X_\pi|$, soit σ_γ l'unique simplexe de X_π dont l'intérieur contient x_γ . Alors :*

$$\chi_\pi(\gamma) = \begin{cases} \text{Tr}(\gamma, \lambda_{\sigma_\gamma}) & \text{si } f(L/F)|f(F[\gamma]/F) \text{ et } e(L/F)|e(F[\gamma]/F), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Des cas particuliers de cette dernière formule furent obtenus dans [Br].

Références

- [Ba] A.I. Badulescu, *Un résultat de transfert et un résultat d'intégrabilité locale des caractères en caractéristique non nulle*, J. Reine Angew. Math. 565 (2003), 101–124.
- [Br] P. Broussous, *Transfert du pseudo-coefficient de Kottwitz et formules de caractre pour la srie discrte de $GL(N)$ sur un corps local*, Canad. J. Math. 66 (2014), no. 2, 241283.
- [BH] C.J. Bushnell et G. Henniart, *Local tame lifting for $GL(N)$. I. Simple characters*, Inst. Hautes tudes Sci. Publ. Math. No. 83 (1996), 105233.
- [BH2] C.J. Bushnell et G. Henniart, *Explicit functorial correspondences for level zero representations of p -adic linear groups*, J. Number Theory 131 (2011), no. 2, 309–331.
- [BK] C.J. Bushnell et P.C. Kutzko, *Smooth representations of reductive p -adic groups: structure theory via types*, Proc. London Math. Soc. (3) 77 (1998), 582–634.
- [BL] P. Broussous et B. Lemaire, *Building of $GL(m, D)$ and centralizers*, Transform. Groups 7 (2002), no. 1, 1550.

- [BS] P. Broussous et P. Schneider, *Simple characters and coefficient systems on the building*, arXiv:1402.2501, 2014.
- [Ka] D. Kazhdan, *Cuspidal geometry of p -adic groups*, J. Analyse Math. 47 (1986), 136.
- [Ko] R.E. Kottwitz, *Tamagawa numbers*, Ann. of Math. (2) 127 (1988), no. 3, 629–646.
- [SS] P. Schneider et U. Stuhler, *Representation theory and sheaves on the Bruhat-Tits building*, Inst. Hautes études Sci. Publ. Math. No. 85 (1997), 97–191.
- [SZ] A.J. Silberger et E.-W. Zink, *An explicit matching theorem for level zero discrete series of unit groups of p -adic simple algebras*, J. Reine Angew. Math. 585 (2005), 173–235.